

LBRIS

We know
books

GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

**SĂ ÎNVĂȚĂM
MATEMATICĂ
FĂRĂ PROFESOR
CLASA A X – A
PROFIL TEHNOLOGIC**

**EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2021**

CUPRINS

| | Enunțuri Rezolvări | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|-----|
| 1. Mulțimi de numere | 5 | 146 |
| 1.1 Mulțimea numerelor reale | 5 | 146 |
| 1.1.1 Puteri cu exponent întreg. Proprietăți. | 5 | 146 |
| 1.1.2 Radical dintr-un număr real pozitiv. | | |
| Proprietăți ale radicalilor | 8 | 147 |
| 1.1.3 Puteri cu exponent rațional. Aproximări raționale pentru numere iraționale sau reale. | | |
| Puteri cu exponent real | 14 | 148 |
| 1.1.4 Noțiunea de logaritm. Proprietăți ale logaritmilor. Calcule cu logaritmi. Operația de logaritmare | 18 | 149 |
| 1.2 Mulțimea numerelor complexe | 23 | 151 |
| 1.2.1 Numere complexe sub formă algebrică. Conjugatul unui număr complex. Operații cu numere complexe | 23 | 151 |
| 1.2.2 Interpretarea geometrică a operațiilor de adunare și scădere a numerelor complexe și a înmulțirii acestora cu un număr real | 29 | 152 |
| 1.2.3 Rezolvarea de ecuații în \mathbb{C} | 33 | 152 |
| 1.3 Teste grilă de autoevaluare | 36 | 153 |
| Testul 1 | 36 | 153 |
| Testul 2 | 37 | 154 |
| 2. Funcții și ecuații | 38 | 155 |
| 2.1 Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate. Funcții inversabile | 38 | 155 |
| 2.2 Funcția putere cu exponent natural. Funcția radical. Ecuații iraționale ce conțin radicali de ordinal 2 sau 3 | 44 | 157 |
| 2.3 Funcția exponențială. Ecuații exponențiale. | 50 | 160 |
| 2.4 Funcția logaritmică. Ecuații logaritmice. | 55 | 162 |
| 2.5 Funcții trigonometrice directe și inverse . . . | 60 | 164 |
| 2.5.1 Funcții trigonometrice directe | 60 | 164 |
| 2.5.2 Funcții trigonometrice inverse | 68 | 166 |
| 2.6 Teste grilă de autoevaluare | 76 | 166 |

| | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|
| Testul 1 | 76 | 166 |
| Testul 2 | 77 | 168 |
| Testul 3 | 78 | 169 |
| 3. Metode de numărare | 79 | 170 |
| 3.1 Metoda inducției matematice | 79 | 170 |
| 3.2 Mulțimi finite ordonate | 82 | 171 |
| 3.3 Permutări | 84 | 172 |
| 3.4 Aranjamente | 86 | 172 |
| 3.5 Combinări | 89 | 174 |
| 3.6 Binomul lui Newton | 91 | 175 |
| 3.7 Teste grilă de autoevaluare | 96 | 177 |
| Testul 1 | 96 | 177 |
| Testul 2 | 97 | 178 |
| Testul 3 | 98 | 179 |
| 4. Matematici financiare | 99 | 179 |
| 4.1 Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi, TVA | 99 | 179 |
| 4.2 Culegerea, clasificarea și prelucrarea datelor statistice. Reprezentarea grafică a datelor statistice. Interpretarea datelor statistice prin parametrii de poziție | 108 | 181 |
| 4.3 Elemente de probabilități | 111 | 183 |
| 4.3.1 Evenimente. Operații cu evenimente | 111 | 183 |
| 4.3.2 Probabilități. Proprietăți ale probabilităților | 115 | 183 |
| 4.3.3 Probabilități condiționate. Evenimente independente | 118 | 184 |
| 4.3.4 Schema lui Poisson. Schema lui Bernoulli | 121 | 185 |
| 4.3.5 Variabile aleatoare | 123 | 186 |
| 4.4 Teste grilă de autoevaluare | 127 | 187 |
| Testul 1 | 127 | 187 |
| Testul 2 | 128 | 188 |
| 5. Geometrie | 129 | 189 |
| 5.1 Reper cartezian în plan. Coordonate carteziane în plan. Distanța dintre două puncte în plan. | 129 | 189 |
| 5.2 Coordonatele unui vector. Coordonatele sumei vectoriale. Coordonatele produsului dintre un vector și un număr real. | 132 | 189 |
| 5.3 Ecuații ale dreptei în plan. Coliniaritate, | | |

| | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|
| concurență | 135 | 190 |
| 5.4 Condiții de paralelism, condiții de perpendicularitate a două drepte din plan. Calculul de distanțe și arii | 139 | 191 |
| 5.5 Teste grilă de autoevaluare | 144 | 193 |
| Testul 1 | 144 | 193 |
| Testul 2 | 145 | 194 |

1. Mulțimi de numere

1.1 Mulțimea numerelor reale

1.1.1 Puteri cu exponent întreg. Proprietăți.

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Definiție Fiind dat numărul $a \in \mathbf{R} - \{0\}$ și $n \in \mathbf{N}$, avem

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}} \text{ și } a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Example. a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; b) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{2^4}} = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

2. Proprietăți ale puterilor cu exponent întreg.

a) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și $m, n \in \mathbf{Z}$ avem: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

b) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și $m, n \in \mathbf{Z}$ avem: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

c) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și $m, n \in \mathbf{Z}$ avem: $(a^m)^n = a^{mn}$.

d) Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{Z}$ avem: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

e) Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$ și $n \in \mathbf{Z}$ avem: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Example. a) $2^{-3} \cdot 2^4 = 2^{-3+4} = 2^1$;

b) $3^5 : 3^{-3} = 3^{5-(-3)} = 3^{5+3} = 3^8$; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}}$.

d) $(4^{-2})^3 = 4^{(-2) \cdot 3} = 4^{-6} = \frac{1}{4^6}$; e) $(2 \cdot 3)^{-2} = 2^{-2} \cdot 3^{-2}$.

b) Probleme rezolvate

1. Aduceți la forma cea mai simplă: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

Soluție. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = (2^{-1})^{-1} + (2^{-1})^{-2} + (2^{-1})^{-3} = 2^{(-1)(-1)} + 2^{(-1)(-2)} + 2^{(-1)(-3)} = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 + 4 + 8 = 14$.

2. Aduceți la forma cea mai simplă: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$.

Soluție. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^1 = 2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$.

Analog $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{64}{27}$ și produsul este: $2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{64}{27} = \frac{32}{3}$.

3. Ordonăți crescător numerele: $2^{1+2+\dots+15}$ și $3^{1+2+\dots+13}$.

Soluție. Avem: $2^{1+2+\dots+15} = 2^{\frac{15 \cdot 16}{2}} = 2^{120} = (2^3)^{40} = 8^{40}$.

Analog $3^{1+2+\dots+13} = 3^{\frac{13 \cdot 14}{2}} = 3^{91} > 9^{40} > 8^{40} \Rightarrow 3^{1+2+\dots+13} > 2^{1+2+\dots+15}$.

4. Ordonăți descrescător numerele:

$(-1)^1; (-2)^2; (-3)^3; (-4)^4; (-5)^5$.

Soluție. Avem: $(-1)^1 = -1; (-2)^2 = 2^2 = 4; (-3)^3 = -3^3 = -27; (-4)^4 = 4^4 = 256; (-5)^5 = -5^5 = -3125$.

Ordinea descrescătoare este: 256, 4, -1, -27, -3125.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Calculați $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ și arătați că suma lor este egală cu:

11 12 13 14 15

2. Calculați $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}, \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ și arătați că produsul lor este egală cu:

121 125 136 144 156

3. Calculați $(-3)^4$ și $(-4)^3$ și arătați că suma lor este egală cu:

15 16 17 18 19

4. Calculați $N = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{-7}$ și arătați că este egal cu:

5 6 7 8 9

5. Calculați $N = 2^{-1} \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-4} \cdot 2^{15}$ și arătați că este egal cu:

16 24 32 40 48

6. Calculați $N = 2^{-1} \cdot 2^{-2} + 2^{-3} \cdot 2^{-4} + 2^{-5} \cdot 2^{-6}$ și arătați că este egal cu:

4 5 6 7 8

7. Calculați $N = 3^1 \cdot 3^{-1} + 4^1 \cdot 4^{-1} + 5^1 \cdot 5^{-1}$ și arătați că este egal cu:

40 50 60 70 80

6

8. Calculați $N = 2:2^2 + 4:4^2 + 8:8^2$ și arătați că este egal cu:

$\frac{5}{8} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{8}{8} \quad \frac{9}{8}$

9. Calculați: $N = (-1)^{-1} + (-1)^{-2} + (-1)^{-3}$ și arătați că este egal cu:

-2 -1 0 1 2

10. Calculați: $N = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ și arătați că este egal cu:

-7 -6 -5 -6 0

11. Calculați: $N = \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \frac{2^3}{2^4} + \frac{2^4}{2^5}$ și arătați că este egal cu:

0 1 2 3 4

12. Calculați: $N = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

60 61 62 63 64

13. Calculați: $N = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot \dots \cdot (-1)^{50}$ și arătați că este egal cu:

-2 -1 0 1 2

14. Calculați: $N = (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{75}$ și arătați că este egal cu:

-2 -1 0 1 2

15. Calculați: $N = ((-1)^1)^2 \cdot ((-1)^2)^3 \cdot \dots \cdot ((-1)^{25})^{26}$ și arătați că este egal cu:

-2 -1 0 1 2

16. Calculați: $N = ((-1)^1)^3 + ((-1)^3)^5 \cdot \dots \cdot ((-1)^{15})^{17}$ și arătați că este egal cu:

-10 -8 -6 0 8

17. Arătați că numerele: $\frac{2^7}{2^8} + \frac{2^9}{2^{10}}$ și $\frac{3^2}{3^3} + \frac{3^4}{3^5} + \frac{2^6}{3^7}$ sunt egale cu:

0 1 2 3 4

7

1.1.2 Radical dintr-un număr real pozitiv.

Proprietăți ale radicalilor.

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Fiind dat $a \in \mathbf{R}, a \geq 0$ și $n \in \mathbf{N}$, numim **radical de ordinal n** al numărului a , unicul număr real pozitiv care ridicat la puterea n să dea valoarea a .

Notăm radicalul de ordin n al numărului real a cu $\sqrt[n]{a}$ și vom studia în continuare cazurile $n = 2, 3$, adică \sqrt{a} și $\sqrt[3]{a}$.

Radicalul de ordin 2 al numărului real și pozitiv a este unica soluție pozitivă a ecuației $x^2 = a$.

Radicalul de ordin 3 al numărului real și pozitiv a este unica soluție pozitivă a ecuației $x^3 = a$.

Exemple. a) $\sqrt{4} = 2$, deoarece $2^2 = 4$ sau 2 este rădăcina pozitivă a ecuației $x^2 = 4$.

b) $\sqrt[3]{27} = 3$, deoarece $3^3 = 27$ sau 3 este rădăcina pozitivă a ecuației $x^3 = 27$.

2. Proprietățile radicalului de ordin 2 dintr-un număr real și pozitiv.

- a) Dacă $a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.
- b) Dacă $a \geq 0, b > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- c) Dacă $a < 0, b < 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$.
- d) Dacă $a < 0, b < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$.
- e) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt{a^2} = |a|$.
- f) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}$.
- g) Dacă $a > 0 \Rightarrow a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.
- h) Dacă $a < 0 \Rightarrow a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.
- i) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow (\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$.
- j) Dacă $a \geq 0, b \geq 0$ avem: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ - comparare.
- k) Dacă $a \in \mathbf{R}$ și $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ - raționalizare numitor.

l) Dacă $a > 0, b > 0, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ - raționalizare numitor.

m) Dacă $a > 0, b > 0, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$ - raționalizare numitor.

Exemple. a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$;

c) $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

3. Proprietățile radicalului de ordin 3 dintr-un număr real.

- a) Dacă $a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$.
- b) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.
- c) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$.
- d) Dacă $a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$.
- e) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow (\sqrt[3]{a})^m = \sqrt[3]{a^m}$.
- f) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$ - raționalizare numitor.
- g) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a - b}$ - raționalizare numitor.
- h) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{a - b}$ - raționalizare numitor.
- i) h) Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, avem: $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

Exemple. a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3 \cdot 5} = \sqrt[3]{15}$; b) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$;

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}}{5 - 2} = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}{3}$;

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}{2 - 3}$.

4. Formulele radicalilor compuși

Dacă $a > 0, b > 0, a^2 \geq b$ și $c = \sqrt{a^2 - b}$, atunci:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}} \text{ și } \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

Exemplu. Dacă avem de calculat $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$, calculăm mai întâi $c = \sqrt{3^2 - 8} = \sqrt{9 - 8} = 1$ și apoi:

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{1} = 1 + \sqrt{2}.$$

b) Probleme rezolvate

1. Calculați: $\sqrt{4 \cdot 1,69} + \sqrt{9 \cdot 1,44} + \sqrt{16 \cdot 1,21}$.

Soluție. $\sqrt{4 \cdot 1,69} + \sqrt{9 \cdot 1,44} + \sqrt{16 \cdot 1,21} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{1,69} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{1,44} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{1,21} = 2 \cdot 1,3 + 3 \cdot 1,2 + 4 \cdot 1,1 = 2,6 + 3,6 + 4,4 = 6,2 + 4,4 = 10,6.$

2. Calculați: $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{9}{36}}$.

Soluție. $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{9}{36}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}} = \frac{2}{3} + \frac{3}{6} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}.$

3. Scoateți factorii corespunzători de sub radicali:

a) $\sqrt{200}$ b) $\sqrt{1200}$ c) $\sqrt{1500}$.

Soluție. a) $200 = 2^3 \cdot 5^2 \Rightarrow \sqrt{200} = \sqrt{2^3 \cdot 5^2} = 2 \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}.$

b) $1200 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 3 \Rightarrow \sqrt{1200} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2 \cdot 3} = 2^2 \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}.$

c) $1500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 3 \Rightarrow \sqrt{2^2 \cdot 5^3 \cdot 3} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5 \cdot 3} = 10\sqrt{15}.$

4. Calculați: $(\sqrt{3})^3 + (\sqrt{12})^3$.

Soluție. $(\sqrt{3})^3 + (\sqrt{12})^3 = \sqrt{3^3} + ((2\sqrt{3}))^3 = 3\sqrt{3} + 2^3 \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3} + 8 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}.$

5. Calculați: $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64}$.

Soluție. $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[3]{4^3} = 2 + 3 + 4 = 5 + 4 = 9.$

6. Calculați: $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} + \sqrt[3]{\frac{125}{27}}$.

Soluție. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} + \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3}} + \sqrt[3]{\frac{5^3}{3^3}} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}.$

7. Scoateți factorii corespunzători de sub radicali:

a) $\sqrt[3]{40}$ b) $\sqrt[3]{162}$ c) $\sqrt[3]{405}$.

Soluție. a) $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt[3]{5}.$

b) $\sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{3^4 \cdot 2} = 3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 2} = 3 \cdot \sqrt[3]{6}.$

c) $\sqrt[3]{405} = \sqrt[3]{3^4 \cdot 5} = 3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 5} = 3 \cdot \sqrt[3]{15}.$

8. Calculați: $(\sqrt[3]{2})^5 + (\sqrt[3]{4})^4$.

Soluție. $(\sqrt[3]{2})^5 + (\sqrt[3]{4})^4 = \sqrt[3]{2^5} + \sqrt[3]{4^4} = 2\sqrt[3]{4} + 4\sqrt[3]{4} = 6\sqrt[3]{4}.$

9. Comparați numerele: $3\sqrt{5}$ și $5\sqrt{3}$.

Soluție. $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$ și $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}.$

Însă $45 < 75 \Rightarrow \sqrt{45} < \sqrt{75} \Rightarrow 3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}.$

10. Comparați numerele: $3\sqrt[3]{2}$ și $2\sqrt[3]{6}$.

Soluție. $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$ și $2\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{48}.$

Însă $48 < 54 \Rightarrow \sqrt[3]{48} < \sqrt[3]{54} \Rightarrow 2\sqrt[3]{6} < 3\sqrt[3]{2}.$

11. Raționalizați numitorul fracției $\frac{2}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}.$

Soluție. $\frac{2}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5^2 \cdot 3} - \sqrt{3^2 \cdot 5}} = \frac{2}{\sqrt{75} - \sqrt{45}} = \frac{2(\sqrt{75} + \sqrt{45})}{75 - 45} = \frac{2(\sqrt{75} + \sqrt{45})}{30} = \frac{\sqrt{75} + \sqrt{45}}{15}.$

11. Raționalizați numitorul fracției $\frac{15}{3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{3}}.$

Soluție. $3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{24}.$

$$\frac{15}{3^3\sqrt{2}+2^3\sqrt{3}} = \frac{15}{3\sqrt{54^2-3\sqrt{54}\cdot 3\sqrt{24}+3\sqrt{24^2}}} = \frac{54-24}{3\sqrt{54^2-3\sqrt{54}\cdot 3\sqrt{24}+3\sqrt{24^2}}} = \frac{30}{2}$$

12. Calculați: $\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}}$.

Soluție. Pentru ambii radicali $c = \sqrt{4^2 - 15} = 1$ și atunci:

$$\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}} = \sqrt{\frac{4+1}{2}} + \sqrt{\frac{4-1}{2}} + \sqrt{\frac{4+1}{2}} - \sqrt{\frac{4-1}{2}} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}.$$

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Valoarea calculului: $\sqrt{4} + \sqrt{25} + \sqrt{64}$ este:

13 14 15 16 17

2. Valoarea calculului: $\sqrt{0,04} + \sqrt{0,09} + \sqrt{0,25}$ este:

0,8 0,9 1 1,1 1,2

3. Valoarea calculului: $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{25}{36}}$ este:

$\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$ 2 $\frac{5}{2}$

4. Valoarea calculului: $\sqrt[3]{\frac{1000}{729}} + \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ este:

$\frac{3}{8}$ 1 $\frac{16}{9}$ 2 $\frac{15}{7}$

5. Valoarea calculului: $\sqrt{4 \cdot 9} + \sqrt{16 \cdot 25}$ este:

23 24 25 26 27

6. Valoarea calculului: $\sqrt[3]{8 \cdot 27} + \sqrt{64 \cdot 25}$ este:

43 44 45 46 47

7. Valoarea calculului: $\sqrt{4 \cdot 16} + \sqrt[3]{216 \cdot 8}$ este:

17 18 19 20 21

8. Valoarea calculului: $\sqrt{2^3 \cdot 3^2} + \sqrt{2^5 \cdot 3^4}$ este:

40 $\sqrt{2}$ 40 42 $\sqrt{2}$ 42 44 $\sqrt{2}$

9. Valoarea calculului: $\sqrt{2^2 \cdot 3^3} + \sqrt{2^4 \cdot 3^3}$ este:

18 $\sqrt{3}$ 18 $\sqrt{3}$ 20 $\sqrt{3}$ 22 24 $\sqrt{3}$

10. Valoarea calculului: $\sqrt[3]{2^6 \cdot 3^4} + \sqrt[3]{2^9 \cdot 3^7}$ este:

80 $\sqrt[3]{3}$ 81 $\sqrt[3]{3}$ 82 $\sqrt[3]{3}$ 83 $\sqrt[3]{3}$ 84 $\sqrt[3]{3}$

11. Valoarea calculului: $\sqrt{2} + (\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})^5 + (\sqrt{2})^7$ este:

8 $\sqrt{2}$ 15 $\sqrt{2}$ 10 $\sqrt{2}$ 11 $\sqrt{2}$ 18 $\sqrt{2}$

12. Valoarea calculului: $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}}$ este:

$\frac{3\sqrt{2}}{4}$ $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ $\frac{11\sqrt{2}}{4}$

13. Ordonați crescător numerele: $2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}, \sqrt{15}, 6\sqrt{2}, 2\sqrt{6}$ și arătați că cel mai mic dintre ele este:

2 $\sqrt{3}$ 3 $\sqrt{2}$ $\sqrt{15}$ 6 $\sqrt{2}$ 2 $\sqrt{6}$

14. Ordonați crescător numerele: $2^3\sqrt{5}, \sqrt[3]{45}, 3^3\sqrt{2}, 2^3\sqrt{7}, 3^3\sqrt{3}$ și arătați că cel mai mare dintre ele este:

2 $\sqrt[3]{5}$ $\sqrt[3]{45}$ 3 $\sqrt[3]{2}$ 2 $\sqrt[3]{7}$ 3 $\sqrt[3]{3}$

15. Valoarea calculului: $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{3 + \sqrt{8}}$ este:

$\sqrt{2} + 1$ $\sqrt{2} - 1$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{3} - 1$

16. Valoarea calculului: $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ este:

2 - $\sqrt{2}$ $\sqrt{2} + 1$ $\sqrt{2} + 2$ $\sqrt{3} + 1$ $\sqrt{3} - 1$

17. Valoarea calculului: $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{3 + \sqrt{8}}$ este:

1 2 3 4 5

18. Valoarea calculului: $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ este:

1 2 3 4 5